第十一屆“走進美妙的數學花園”全國青少年數學論壇
數學解題技能展示

七年級初賽 A 卷

1.方程$\frac{1}{2013}x-\frac{1}{2012}=\frac{1}{2012}x-\frac{1}{2013}$的解是_______.
【答案】$x=-1$.
【解析】因該方程是一元一次方程，故解是唯一的.顯然$x=-1$是方程的解，故方程的解是$x=-1$.

2.如果$\triangle ABC$的三邊長a,b,c滿足$a^2+b^2+c^2\le ab+bc+ca$，那麼$\triangle ABC$的形狀是_______三角形.
【答案】等邊.
【解析】由已知條件得$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\le 0$，又$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$，
所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，$a=b=c$，$\triangle ABC$是等邊三角形.

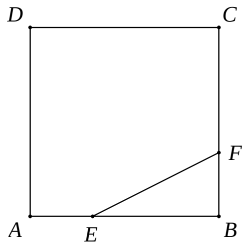
3.某商店失竊，趙、錢、孫、李四人涉案被拘審，四人口供如下：趙說“孫是竊賊”；錢說“李是竊賊”；孫說“如果我作案，那麼李是主犯”；李說“我沒有行竊”·已知四人口供中只有一個是假的，由此可以斷定：說假話的是_______；作案者是_______.
【答案】李；李和孫·
【解析】略.

4.已知$|5x+3|+|5x-4|=7$，則實數x的取值範圍是_______.
【答案】$-\frac{3}{5}\le x\le\frac{4}{5}$.
【解析】根據$|5x+3|+|5x-4|=7$的幾何意義：數軸上$5x$到-3和 4 的距離之和為 7，則$5x$位於-3和 4 之間，故$-3\le 5x\le 4$，$-\frac{3}{5}\le x\le\frac{4}{5}$.

5.方程組$\begin{cases}x+y-3z=1,\\ y+z-3x=2,\\ z+x-3y=3\end{cases}$的解是_______.
【答案】$x=-2, y=-\frac{9}{4}, z=-\frac{7}{4}$.
【解析】三個方程左右兩邊對應相加，得$x+y+z=-6$.
再分別用原三個方程與$x+y+z=-6$左右兩邊對應相減，得$x=-2, y=-\frac{9}{4}, z=-\frac{7}{4}$.

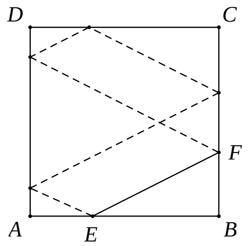
6.計算：
$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2013})(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012})$$
$$-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2013})(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012})=\_\_\_\_\_\_\_.$$
【答案】$\frac{1}{2013}$.
【解析】設$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2013}=a$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2012}=b$，則$a-b=\frac{1}{2013}$.
原式$=a(1+b)-(1+a)b=a-b=\frac{1}{2013}$.

7.如圖，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，點 E 在邊 AB 上，點 F 在邊 BC 上，且 $AE=BF=\frac{1}{3}$，動點 P 從點 E 出發沿線段 EF 向點 F 運動，當碰到正方形的邊時反彈，反彈時反射角等於入射角，當點 P 第一次回到點 E 時，點 P 與正方形的邊碰撞的次數（包括最後撞 E 的一次）為_______.



【答案】6.

【解析】如圖，作相關直線的平行線，易知當點 P 第一次回到點 E 時，點 P 與正方形的邊碰撞的次數為 6 次.



8.觀察下列不等式：

$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$ ；

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$ ；

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$ ；

……

則第 5 個不等式是______ .

【解析】第 4 個不等式是 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}<\frac{9}{5}$ ，

第 5 個不等式是 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}<\frac{11}{6}$.

【說明】明年可改為解答題，證明雙向不等式.

9.已知雞兔同籠，共有 a 只頭和 b 只腳(a,b 均是正整數)，則 a,b 應滿足的條件是_______.

【答案】b 是偶數且 $2a<b<4a$.

【解析】設籠子裏有 x 只雞和 y 只兔子，則 $\begin{cases}x+y=a,\\2x+4y=b.\end{cases}$ 解得 $x=\frac{4a-b}{2},y=\frac{b-2a}{2}$.

由 x,y 都必須是正整數，可知 b 是偶數且 $2a<b<4a$.

10.設 a,b 是常數，當 a,b 滿足條件_______時，二元一次方程組 $\begin{cases}ax+by=1,\\x-2y=-a-b\end{cases}$ 無解.

【答案】$2a+b=0$ 且 $a\neq\pm1$.

【解析】消去 x ，得 $(2a+b)y=a^2+ab+1$.

該方程無解的條件是 $2a+b=0$ 且 $a^2+ab+1\neq0$ ，即 $b=-2a$ 且 $a\neq\pm1$.

11.已知在$\triangle ABC$中，$AB<BC<CA$，若$\angle B=4\angle C$，則$\angle A$的取值範圍是_______.

【答案】$30°<\angle A<80°$.

【解析】由$\angle B=4\angle C$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，得$\angle A+5\angle C=180°$.

解得$\angle C=36°-\frac{1}{5}\angle A$，從而$\angle B=144°-\frac{4}{5}\angle A$.

由$AB<BC<CA$，知$\angle C<\angle A<\angle B$，即$36°-\frac{1}{5}\angle A<\angle A<144°-\frac{4}{5}\angle A$.

解得$30°<\angle A<80°$.

12.已知$a>0,b>0,a+b=2$，則$\frac{a^2+b^2}{a+b}$的最小值是_______.

【答案】1.

【解析 1】$a^2+b^2=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]\geq\frac{1}{2}(a+b)^2=2$，

當且僅當$a=b=1$時，a^2+b^2的最小值是 2，$\frac{a^2+b^2}{a+b}$的最小值是 1.

【解析 2】設$a=1+t,b=1-t$.

則$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{2}=t^2+1\geq1$.

當且僅當$t=0,a=b=1$時，$\frac{a^2+b^2}{a+b}$的最小值是 1.

13.三邊長為整數，且周長等於 24 的不全等三角形的個數是_______.

【答案】12.

【解析】設三角形的三邊長為a,b,c，且$a\leq b\leq c$.

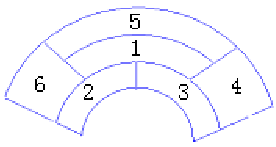
由$2c<a+b+c=24\leq3c$，得$8\leq c<12$，$c=8,9,10,11$.

當$c=8$時，$a+b=16\leq2b$，$b\geq8$，由$b\leq c=8$知$b=8,a=8$，滿足條件的三角形有 1 個.

類似地，當$c=9,10,11$時，分別有 2,4,5 個滿足條件的三角形.

因此，滿足條件的三角形一共有 1+2+4+5=12 個.

14.如圖，建造一個花圃，花圃分為 6 個部分，現要栽種 4 種不同顏色的花，每部分栽種一種且相鄰部分不能栽種同樣顏色的花，則一共有____________種不同的栽種方法.



【解析 1】按區域 1→2→3→4→5→6 的順序栽花，顯然 1 區有 4 種，2 區 3 種，3 區 2 種.

如果 4 區與 2 區同色，則 4 區 1 種，5 區 2 種，6 區 1 種，這樣全部栽種方法數是 4x3x2x1x2x1=48 種.

如果 4 區與 2 區異色，則 4 區有 1 種，當 5 區與 2 區同色時，5 區 1 種，6 區 2 種；當 5 區與 2 區異色時，5 區 1 種，6 區 1 種，這樣全部栽種方法數是 4x3x2x1x1x2+4x3x2x1x1x1=72 種.

由分類計數原理知，共有 48+72=120 種栽種方法.

本題也可按其他區域順序塗色.

【解析 2】先將 6 個區域分成 4 組，通過列舉，6 個區域分成 4 組的方案有 5 種，如下表：

	第一組	第二組	第三組	第四組
分組方案 1	1 區	2 區	3 區、5 區	4 區、6 區
分組方案 2	1 區	2 區、5 區	3 區、6 區	4 區
分組方案 3	1 區	2 區、5 區	3 區	4 區、6 區
分組方案 4	1 區	2 區、4 區	3 區、5 區	6 區
分組方案 5	1 區	2 區、4 區	3 區、6 區	5 區

再將每一組栽一種顏色的花，有 A_4^4 種栽法，故整個花圃不同的栽種方法有 $5A_4^4=120$ 種.

15.已知若干個正數，互不相等，均不為 1，每個數都等於其中另兩個數的積，則這組數至少有______個.
【答案】6.

【解析】顯然 6 個數 $\left\{a,b,ab,\dfrac{1}{ab},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a}\right\}$ 符合條件. 下麵否定個數為 3,4,5 的情形.

(1)設 3 個數 $\{a,b,ab\}$ 符合條件，則 $a=b\cdot ab=ab^2$，$b^2=1$，$b=1$，矛盾. 這說明，3 個數的情形不存在.

(2)設 4 個數 $\{a,b,ab,c\}$ 符合條件.

(i)若 $b=a\cdot ab$，則 $a^2=1$，$a=1$，矛盾；

(ii)若 $b=a\cdot c$，則 $c=\dfrac{b}{a}$，4 個數為 $\left\{a,b,ab,\dfrac{b}{a}\right\}$，則 $a=b\cdot ab$ 或 $a=b\cdot\dfrac{b}{a}$ 或 $a=ab\cdot\dfrac{b}{a}$，即 $b=1$(矛盾)或 $a=b$(矛盾)或 $a=b^2$，從而 4 個數為 $\left\{b^2,b,b^3,\dfrac{1}{b}\right\}$，則 $\dfrac{1}{b}=b^2\cdot b$ 或 $\dfrac{1}{b}=b^2\cdot b^3$ 或 $\dfrac{1}{b}=b\cdot b^3$ 均得 $b=1$，矛盾；

(iii)若 $b=ab\cdot c$，則 $c=\dfrac{1}{a}$，4 個數為 $\left\{a,b,ab,\dfrac{1}{a}\right\}$，則 $a=b\cdot ab$ 或 $a=b\cdot\dfrac{1}{a}$ 或 $a=ab\cdot\dfrac{1}{a}$，即 $b=1$(矛盾)或 $b=a^2$ 或 $a=b$(矛盾)，從而 4 個數為 $\left\{a,a^2,a^3,\dfrac{1}{a}\right\}$，則 $\dfrac{1}{a}=a\cdot a^2$ 或 $\dfrac{1}{a}=a\cdot a^3$ 或 $\dfrac{1}{a}=a^2\cdot a^3$ 均得 $a=1$，矛盾.

這說明，4 個數的情形不存在.

(3)設 5 個數 $\{a,b,ab,c,d\}$ 符合條件.仿前述 4 個數的情形可推出矛盾.